# Analiza i synteza wielowymiarowego sterowania perfekcyjnego

Ćwiczenie ma na celu zapoznanie się z metodą wyznaczania sterowania perfekcyjnego dla wielowymiarowych obiektów opisanych w przestrzeni stanu. Dodatkowym atutem ćwiczenia jest możliwość zapoznania się z podstawami zagadnienia dotyczącego niejednoznacznych odwrotności macierzy nie kwadratowych.

**Informacje wstępne**

Sterowanie perfekcyjne jest jednym z charakterystycznych algorytmów sterowania przywiązujących wagę do minimalizacji uchybu regulacji. Jest to właściwie algorytm predykcyjny, który wykorzystuje deterministyczny predyktor wyjścia w celu obliczenia wartości sygnałów sterujących. Dla obiektów opisanych w przestrzeni stanu, tj. za pomocą równania stanu

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \tag{1}$$

oraz równania wyjścia

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{2}$$

można wyznaczyć takie sprzężenie od wektora stanu, które minimalizować będzie wskaźnik jakości dany wzorem

$$\mathbf{J} = (\mathbf{y}_{ref}(k+1) - \mathbf{y}(k+1))^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}_{ref}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)). \tag{3}$$

Dzięki takiemu założeniu, uzyskiwana suma kwadratu uchybu regulacji będzie posiadała najmniejszą możliwą wartość. Aby uzyskać odpowiednie sterowanie należy obliczyć jednokrokowy predyktor wyjścia i przyrównać go do wartości referencyjnej, zgodnie z następującą zależnością

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}_{ref}(k+1)\ . \tag{4}$$

Następnym etapem jest wyznaczenie dokładnej wartości wyjścia w chwili *k+1*. Dokonuje się tego poprzez przesunięcie równania (2) o jedną próbkę, co ostatecznie prowadzi do uzyskania równania

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1). \tag{5}$$

Teraz, poprzez podstawienie do powyższego równania wektora $\mathbf{x}(k+1)$ pochodzącego z równania (1) otrzymujemy

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \tag{6}$$

a w konsekwencji

$$\mathbf{y}_{ref}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k). \tag{7}$$

Teraz poprzez odpowiednie przekształcenie otrzymujemy prawo sterowania perfekcyjnego

$$\mathbf{u}(k) = (\mathbf{C}\mathbf{B})^{\mathrm{R}}(\mathbf{y}_{ref}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k)) \tag{8}$$

pozwalającego na zmniejszenie uchybu regulacji do jego minimalnej możliwej do uzyskania wartości. Warto zauważyć, że dla zerowej wartości zadanej $\mathbf{y}_{ref}(k+1)=0$, algorytm sterowania perfekcyjnego redukuje się do następującej postaci

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{CB})^{\mathrm{R}}\mathbf{CAx}(k) \tag{9}$$

Istniejąca w tym równaniu notacja $(\mathbf{CB})^{\mathrm{R}}$ oznacza prawostronną odwrotność macierzy $\mathbf{CB}$. Oznacza to, że musi zostać spełnione następujące równanie

$$\mathbf{CB}(\mathbf{CB})^{\mathrm{R}} = \mathbf{I}. \tag{10}$$

Tematyka niejednoznacznych odwrotności macierzy jest szeroko wykorzystywana w teorii sterowania wielowymiarowego. Wszędzie tam, gdzie rozwiązanie bazuje na problemie znalezienia odwrotności, a liczba danych wejściowych i wyjściowych są różne, można skutecznie stosować niejednoznaczne inwersje macierzy.

Klasyczny rozwiązanie problemu odwrotności macierzy bazuje na podejściu minimalno-normowym, zwanym też odwrotnością Moora-Penrosa, danego następującą zależnością

$$(\mathbf{CB})_0^{\mathrm{R}} = (\mathbf{CB})^{\mathrm{T}}(\mathbf{CB}(\mathbf{CB})^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{11}$$

Jest to odwrotność pozwalająca na uzyskanie jednoznacznego wyniku – przez to podejście to stanowi dobry punkt odniesienie dla różnych rodzajów niejednoznacznych odwrotności macierzy. Jedną z tych niejednoznacznych inwersji jest tak zwana σ-inwersja, dana następującą zależnością

$$(\mathbf{CB})^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{CB}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{12}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{\beta}$ może być dowolną* macierzą o rozmiarach takich samych jak rozmiary macierzy $\mathbf{CB}$. Posiadając różne możliwości obliczenia wymaganej macierzy $(\mathbf{CB})^{\mathrm{R}}$ można uzyskać różne własności układu zamkniętego, przy jednoczesnym zachowaniu minimalnego uchybu regulacji.

Analizy układu zamkniętego można dokonać w oparciu o fakt, że sterowanie perfekcyjne można zapisać w postaci sprzężenia od wektora stanu

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{Kx}(k), \tag{13}$$

która realizuje sterowanie perfekcyjne dla następującego wzmocnienia

$$\mathbf{K} = (\mathbf{CB})^{\mathrm{R}}\mathbf{CAx}(k). \tag{14}$$

Bieguny takiego układu działającego w pętli sprzężenia od wektora stanu można obliczyć korzystając z zależności

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0 \tag{15}$$

lub bezpośrednio:

$$\mathrm{eig}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \tag{16}$$

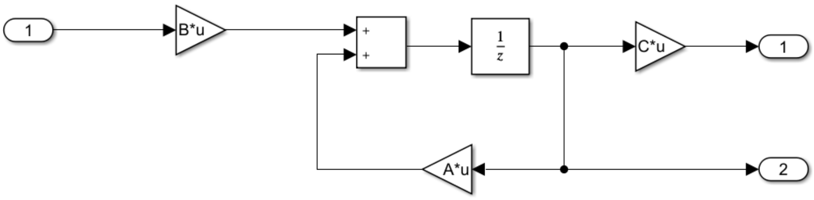
Oczywiście, bieguny układu zamkniętego będą miały wpływ na dynamikę i stabilność uzyskanego układu regulacji.

**Przebieg ćwiczenia**

1. Utworzyć nowy skrypt w środowisku Matlab. Usunąć z przestrzeni roboczej wszelkie niepotrzebne dane oraz zamknąć niepotrzebne okna. Użyć komend *clear all* oraz *close all*.

2. Zadeklarować macierze wchodzące w skład równia stanu (1) oraz równania wyjścia (2). Przyjąć następujące macierze: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.2 \\ 1.1 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [-0.5 \quad 0.7]$.

4. Utworzyć nowy przykład symulacyjny w środowisku Simulink. Zrealizować obiekt opisany w przestrzeni stanu zgodnie z zamieszczonym schematem. Całość obiektu zrealizować jako *subsystem*. Umożliwić wyprowadzenie wektora zmiennych stanu.




*Rys 1. Realizacja obiektu opisanego w przestrzeni stanu*

4. W skrypcie zadeklarować wektor IC (Initial Conditions) odzwierciedlający wektor warunków początkowych. W związku z rozmiarami macierzy $\mathbf{A}$ warunki początkowe muszą kolumnę z dwoma wartościami początkowymi zmiennych stanu.

5. Przeanalizować odpowiedź układu na skok jednostkowy. Przedstawić otrzymane odpowiedzi.

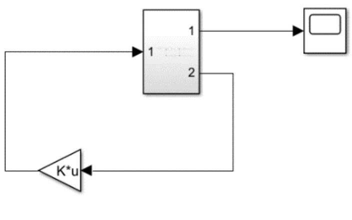
**Uwaga**: obiekt posiada trzy wejścia – należy podać trzy skoki jednostkowe jednocześnie (mux).

6. Obliczyć CBR0 zgodnie ze wzorem (11). W środowisku *Matlab* można tego dokonać wykorzystując polecenie *pinv* (help pinv).

7. Obliczyć CBR1 zgodnie ze wzorem (12). W tym celu zadeklarować macierz $\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3}]$, a do obliczenia $(\mathbf{CB\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}$ wykorzystać polecenie *inv*.

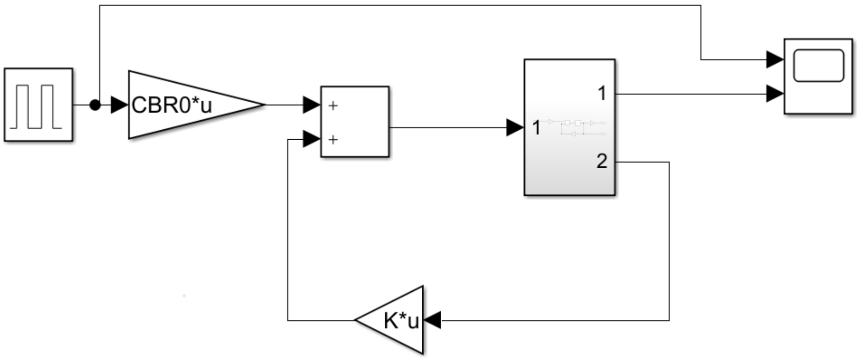
8. Zgodnie ze wzorem (14) obliczyć macierz sprzężenia od stanu $\mathbf{K}$. Wykorzystać jednoznaczną odwrotność przedstawioną we wzorze (11), obliczoną w punkcie 6 instrukcji.

9. Zrealizować uzyskane sprzężenie od stanu w układzie symulacyjnym, zaobserwować przebieg zmiennych stanu oraz zmiennej wyjściowej.




*Rys 2. Układ działający w pętli sprzężenia zwrotnego*

10. Rozbudować układ o człon pozwalający na nadążanie za niezerową (dowolną) wartością zadaną. Wykonać to zgodnie ze wzorem (8) lub schematem przedstawionym na rys. 3. Sprawdzić, czy wartość wyjściowa osiąga wartość referencyjną po czasie opóźnienia równym 1.




*Rys 3. Układ działający dla dowolnej wartości zadanej*

11. Wartość zadaną generować z wykorzystaniem bloku generującego przebieg prostokątny o dwóch wartościach. Współczynnik wypełnienia ustawić na 50%, a okres dobrać tak, aby na przebiegach było widać co najmniej dwa pełne okresy działania układu.

12. Obliczyć wartości biegunów układu zamkniętego przy zastosowaniu inwersji Moora-Penrosa z równania (11). Wykonać to zgodnie z formułą (16).

13. Zbadać wartość sumy kwadratu uchybu sterowania oraz sumy kwadratu sygnałów sterujących (energię sterowania). Wziąć pod uwagę, że sygnał sterujący składa się z trzech składowych.

14. Obliczyć ponownie macierz sprzężenia od stanu $\mathbf{K}$, tym razem wykorzystując inwersję niejednoznaczną, wyliczoną w punkcie 7. Porównać uzyskane uchyb oraz energię sterowania.

15. Obliczyć wartości biegunów układu zamkniętego przy zastosowaniu σ-inwersji z równania (12). Wykonać to zgodnie z formułą (16). Porównać uzyskane bieguny z tymi uzyskanymi w punkcie 12 instrukcji.

16. Przeprowadzić badanie wpływu zawartości macierzy $\boldsymbol{\beta}$ na uzyskiwane wskaźniki błędu oraz energii. W tym celu zmodyfikować macierz stopni swobody $\boldsymbol{\beta}$, uruchomić ponownie skrypt oraz symulację. Zestawić użyte stopnie swobody oraz uzyskane wyniki w formie tabeli, dla przynajmniej trzech różnych przypadków.

**Zadanie dodatkowe:**

17. Zbadać zależność pomiędzy położeniem biegunów a stabilnością:

a) przebiegu zmiennych wyjściowych

b) przebiegu zmiennych stanu

W jaki sposób należy tutaj rozumieć definicję stabilności układu? Skonfrontować uzyskane wnioski ze znanymi definicjami stabilności.