Stabilność obiektów liniowych - Ćwiczenia

Bieguny oraz zera

Dla obiektów opisanych transmitancją operatorową wyróżnia się dwie zasadnicze grupy parametrów:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{Y_Z(s)}=\frac{L(s)}{M(s)}$$

$L(s)=0$ zera

$M(s)=0$ bieguny

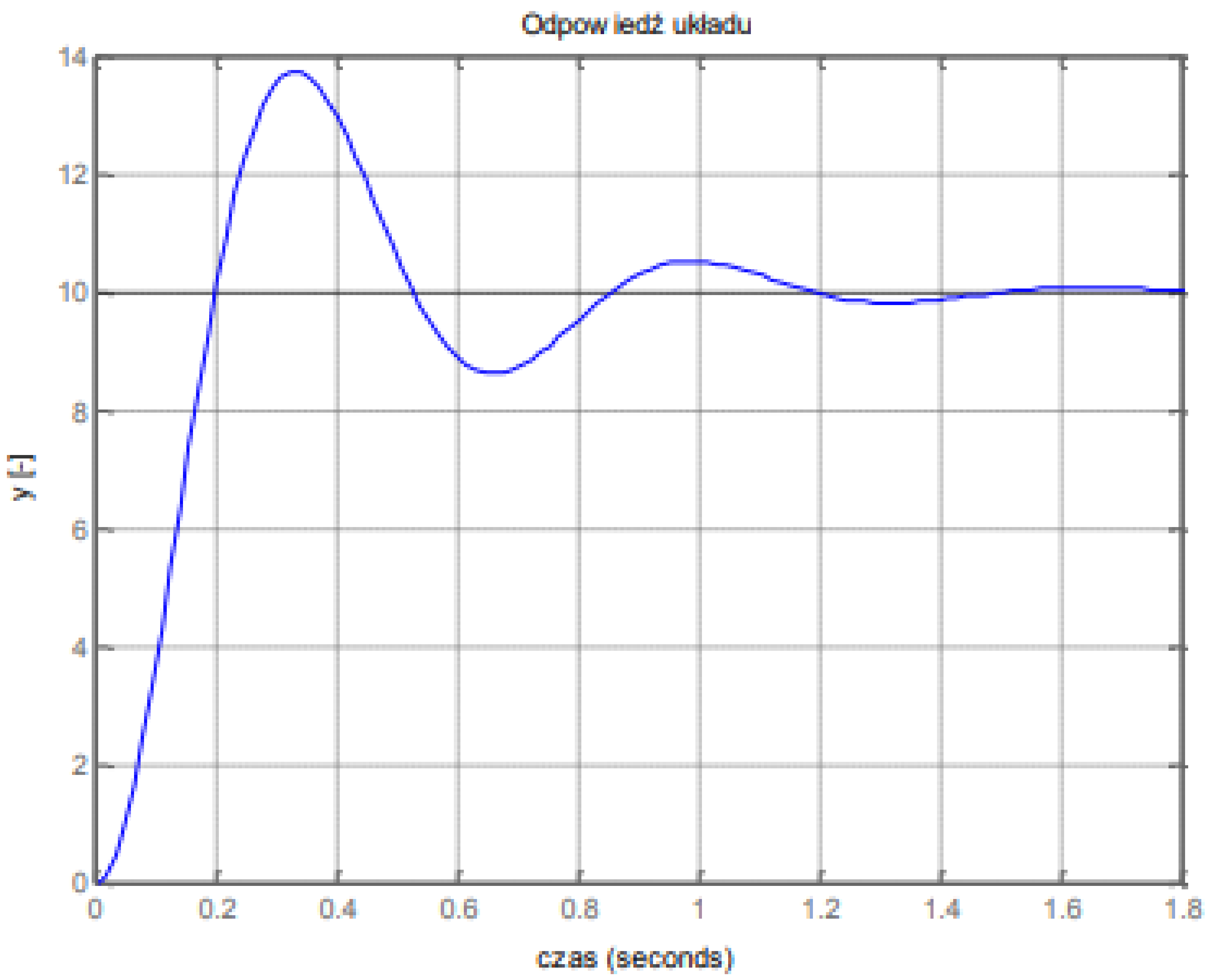
Bieguny oraz zera

Dla obiektów opisanych równaniami stanu jedynie bieguny da się obliczyć w formie jawnej:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \longrightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

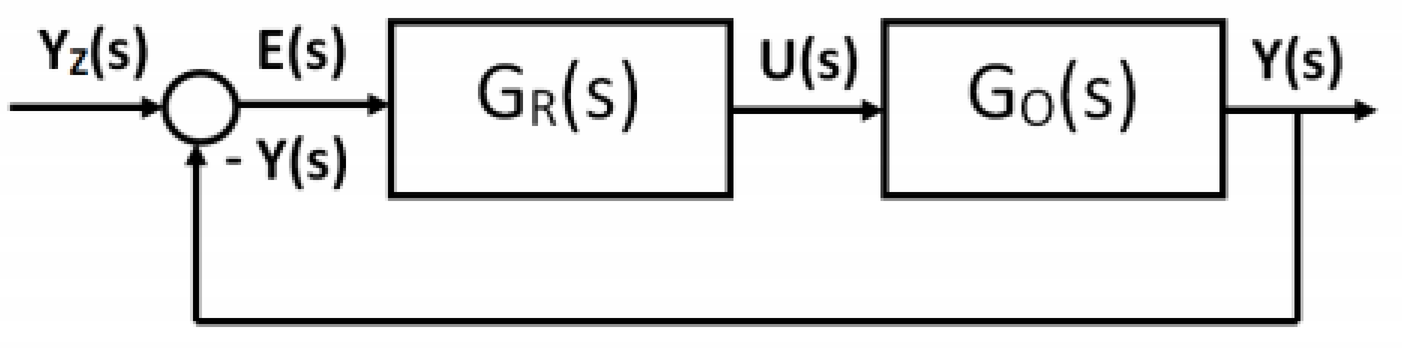
natomiast zera można otrzymać albo po przejściu na dziedzinę transmitancji,
albo wyniku zastosowania rachunku inwersyjnego.

Kryterium odpowiedzi skokowej



Kryterium biegunów

$$G(s)=\frac{Y(s)}{Y_Z(s)}=\frac{G_R(s)G_0(s)}{1+G_R(s)G_0(s)}=\frac{L(s)}{M(s)}$$

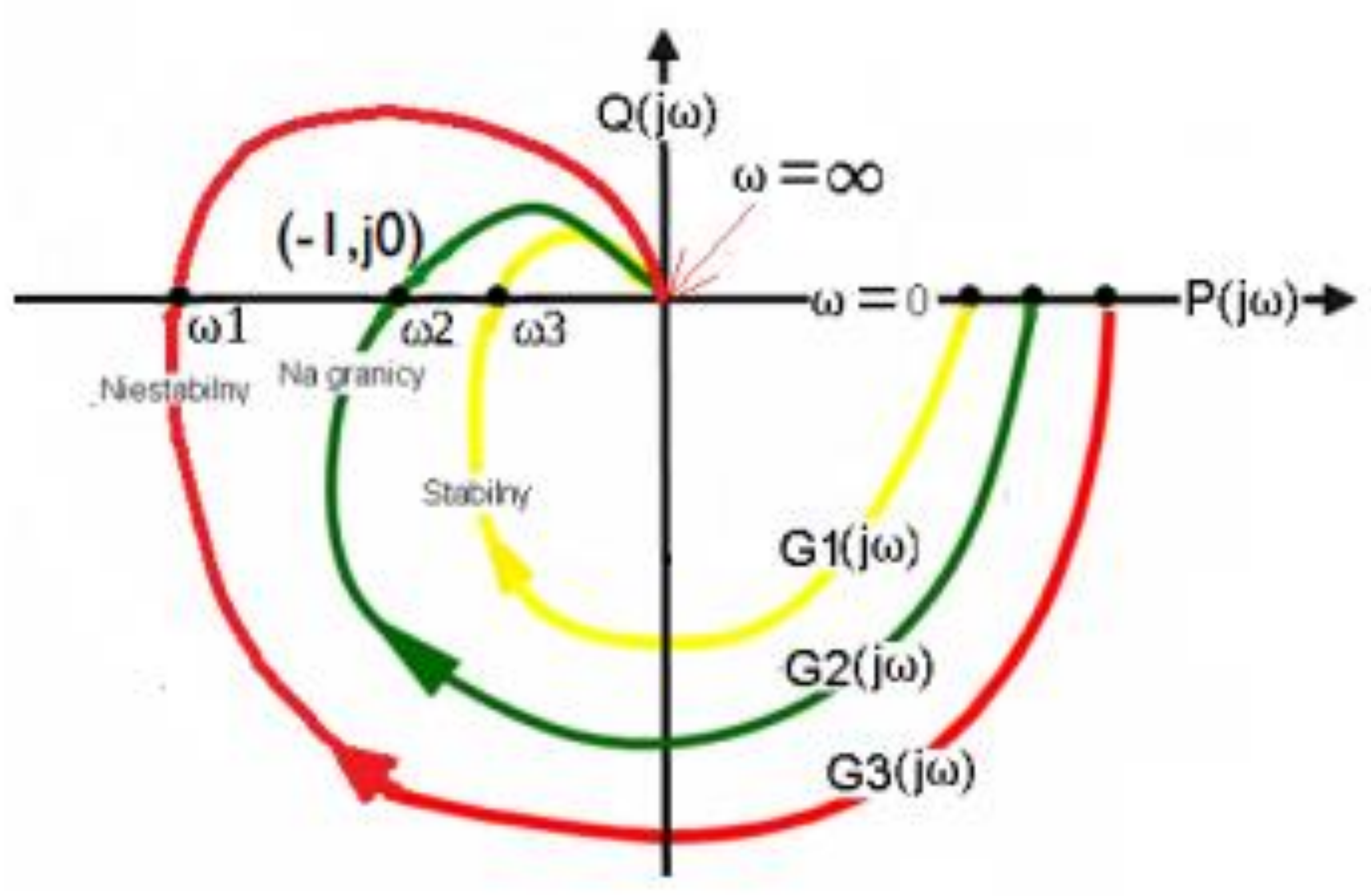


$$M(s)=0\Leftrightarrow 1+G_R(s)G_0(s)=0$$

Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego powinny być ujemne, czyli znajdować się w lewej półpłaszczyźnie.

Kryterium Nyquista

Jeżeli układ otwarty jest stabilny to układ zamknięty jest też stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki przy wzroście ω od 0 do ∞ nie obejmuje punktu o współrzędnych (-1, j0).

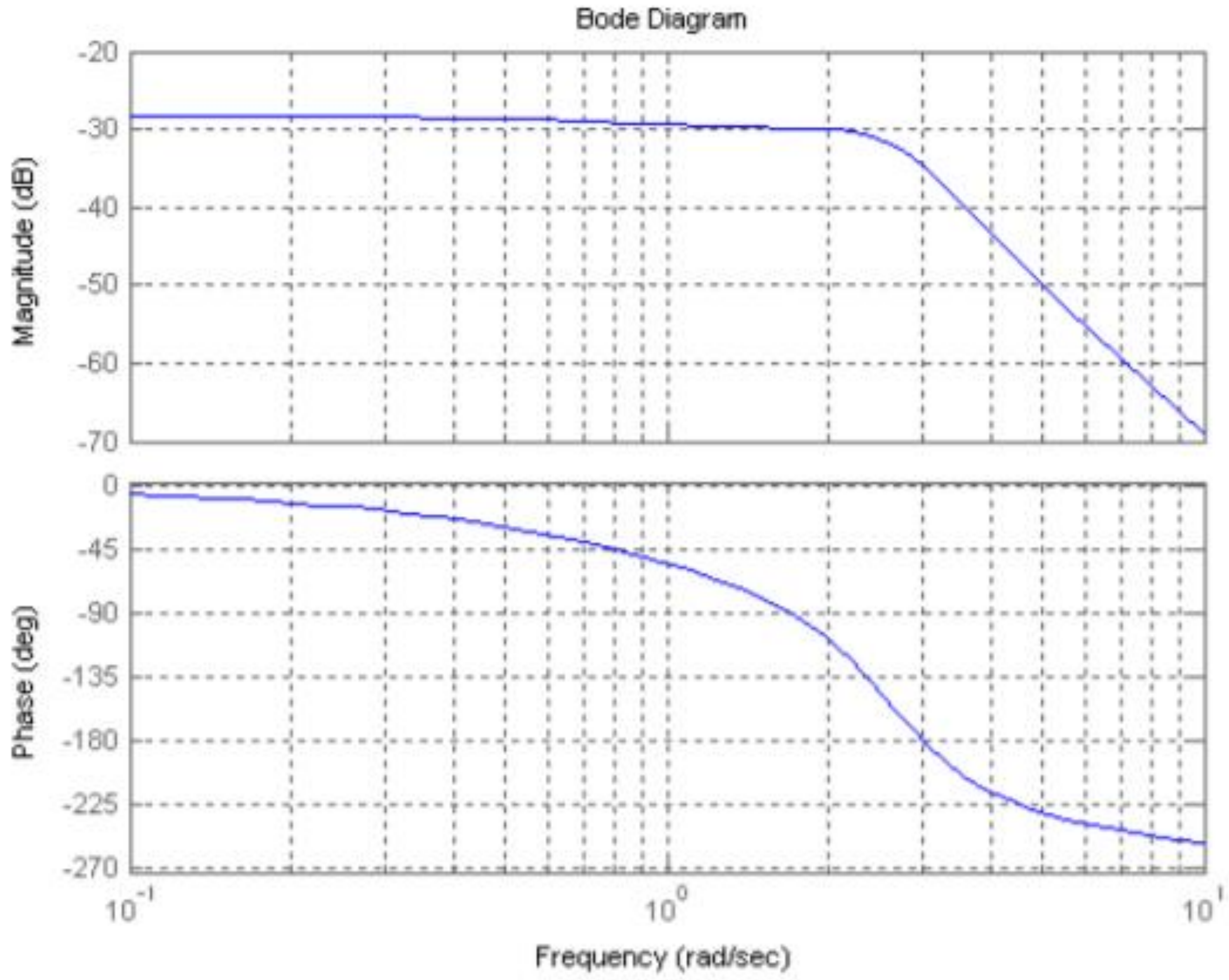


Kryterium Bodego

Po wyznaczeniu charakterystyk logarytmicznych sprawdzamy dwa warunki częstotliwościowe:

Sprawdzamy częstotliwość, przy której charakterystyka fazy przecina wartość − π (czyli -180^o); dla niej moduł powinien być ujemny,

Sprawdzamy częstotliwość, przy której charakterystyka modułu przecina 0 dB; dla niej kąt przesunięcia fazowego powinien być większy niż − π (-180^o).



Przykład I

1. Wyznaczenie biegunów transmitancji (+mapa biegunów)
2. Wyznaczenie charakterystyki Nyquista
3. Wyznaczenie odpowiedzi skokowej
4. Określenie stabilności

Przykład I

Dla obiektu opisanego transmitancją

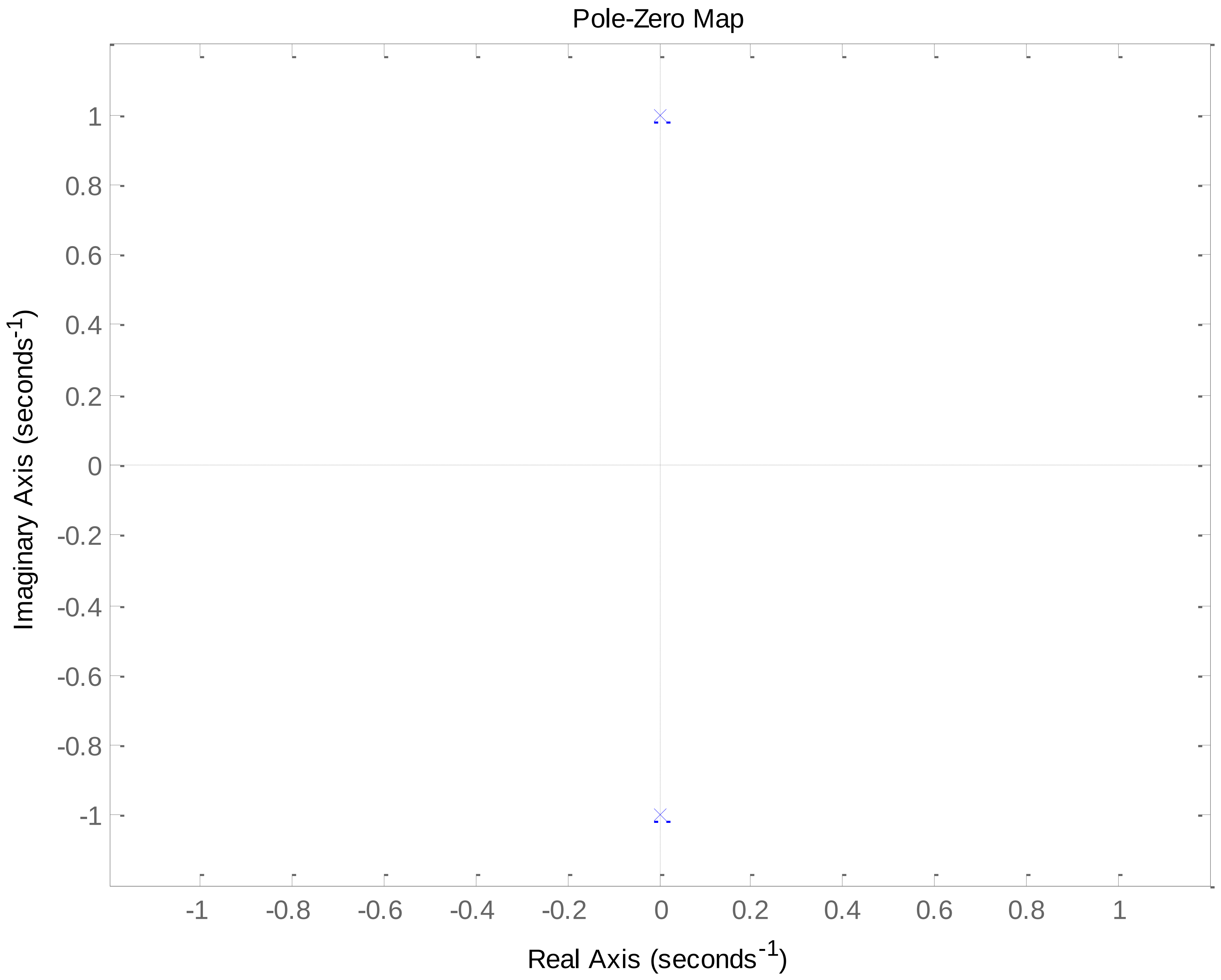
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

zbadać stabilność za pomocą kryterium biegunów, kryterium Nyquista oraz kryterium odpowiedzi skokowej.

Przykład I

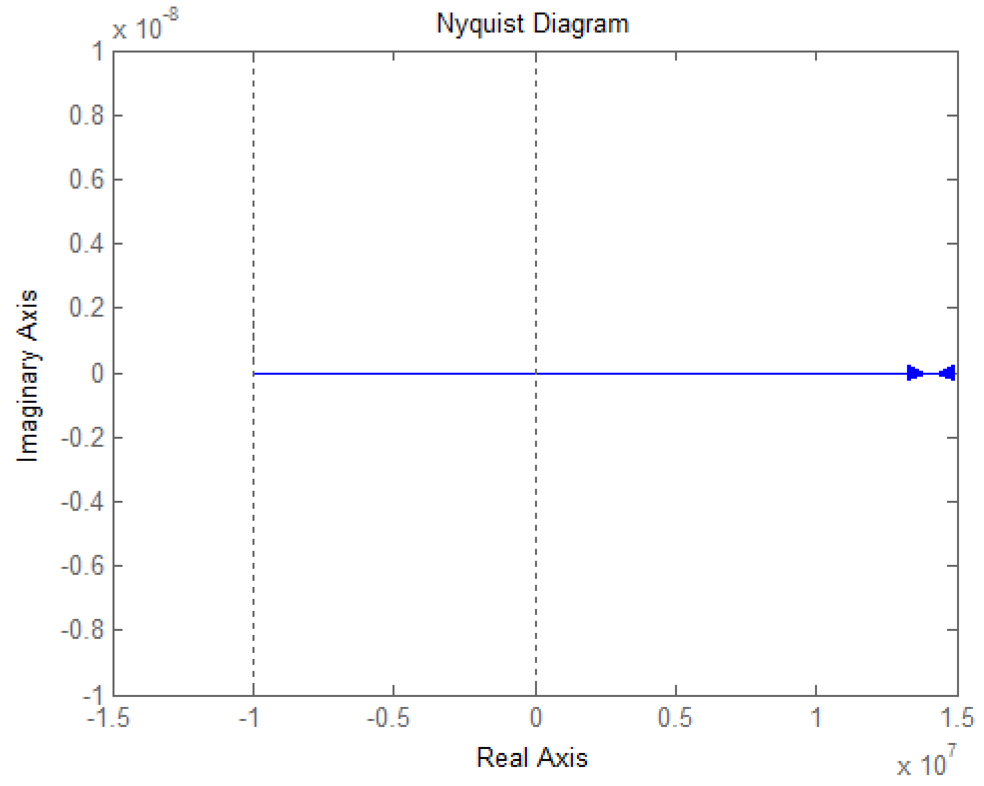
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$M(s) = 0 \Leftrightarrow s_1 = j \vee s_2 = -j$$



Przykład I

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2+1} = \frac{1}{-\omega^2+1}$$

$$M(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2+1}$$

$$\omega = 0 \Leftrightarrow M(\omega) = 1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow M(\omega) = \frac{1}{2}$$

$$\omega = 1 \Leftrightarrow M(\omega) = \infty$$

$$\omega = \sqrt{2} \Leftrightarrow M(\omega) = -1$$

$$\omega = \sqrt{5} \Leftrightarrow M(\omega) = -\frac{1}{4}$$

$$\omega = \infty \Leftrightarrow M(\omega) = 0$$

Przykład I

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \qquad H(s) = \frac{1}{s^3 + s}$$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2 + 1} \qquad \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2 + 1} = A(s^2 + 1) + Bs$$

Przykład I

$$A(s^2+1)+Bs=1$$

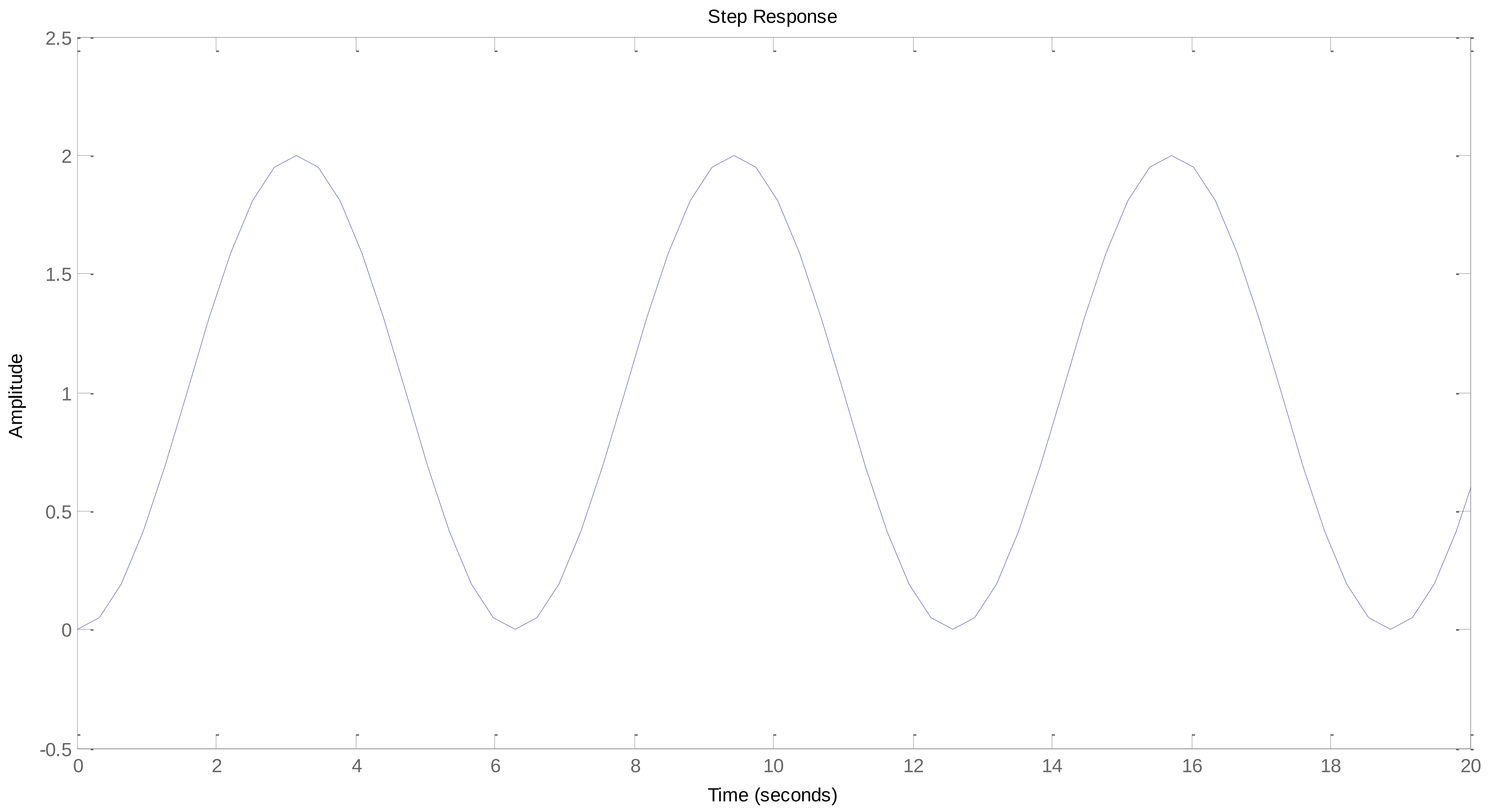
$$As^2+A+Bs=1 \longrightarrow A=1$$

$$As^2+Bs=0 \longrightarrow B=-s$$

$$H(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} \longrightarrow h(t)=1-\cos(t)$$

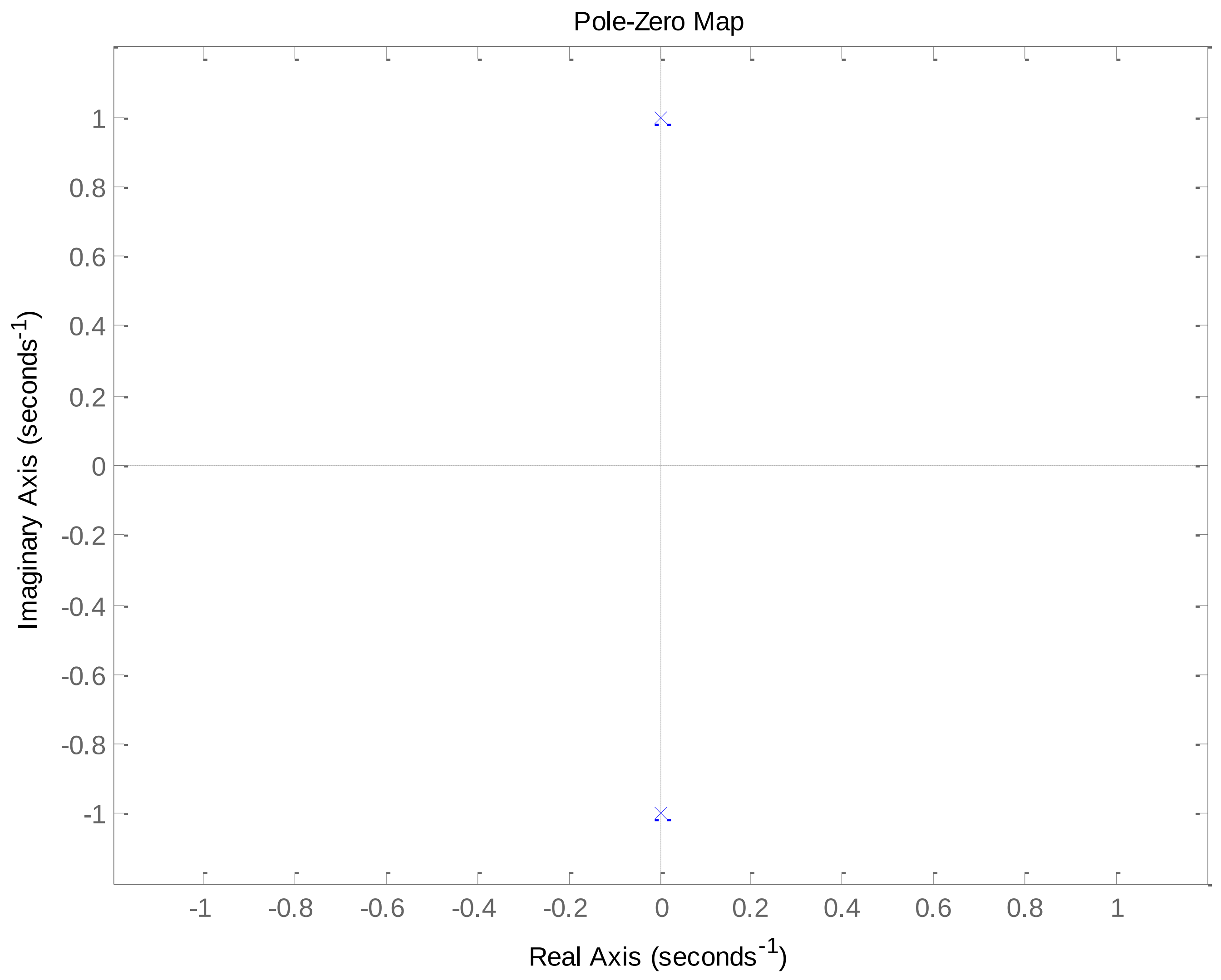
$f(t)$	$F(s)$
$A1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t) 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t) 1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

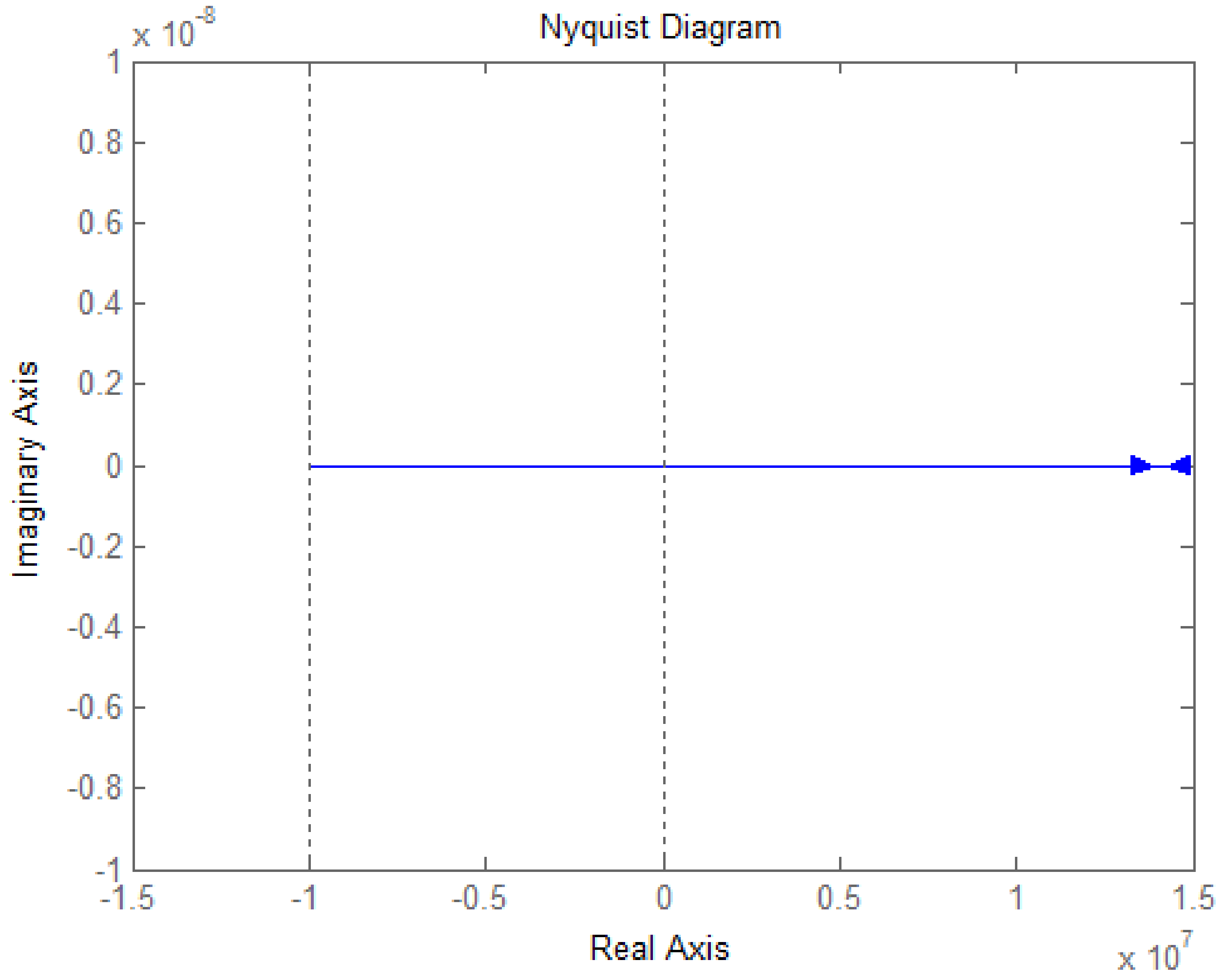
Przykład I

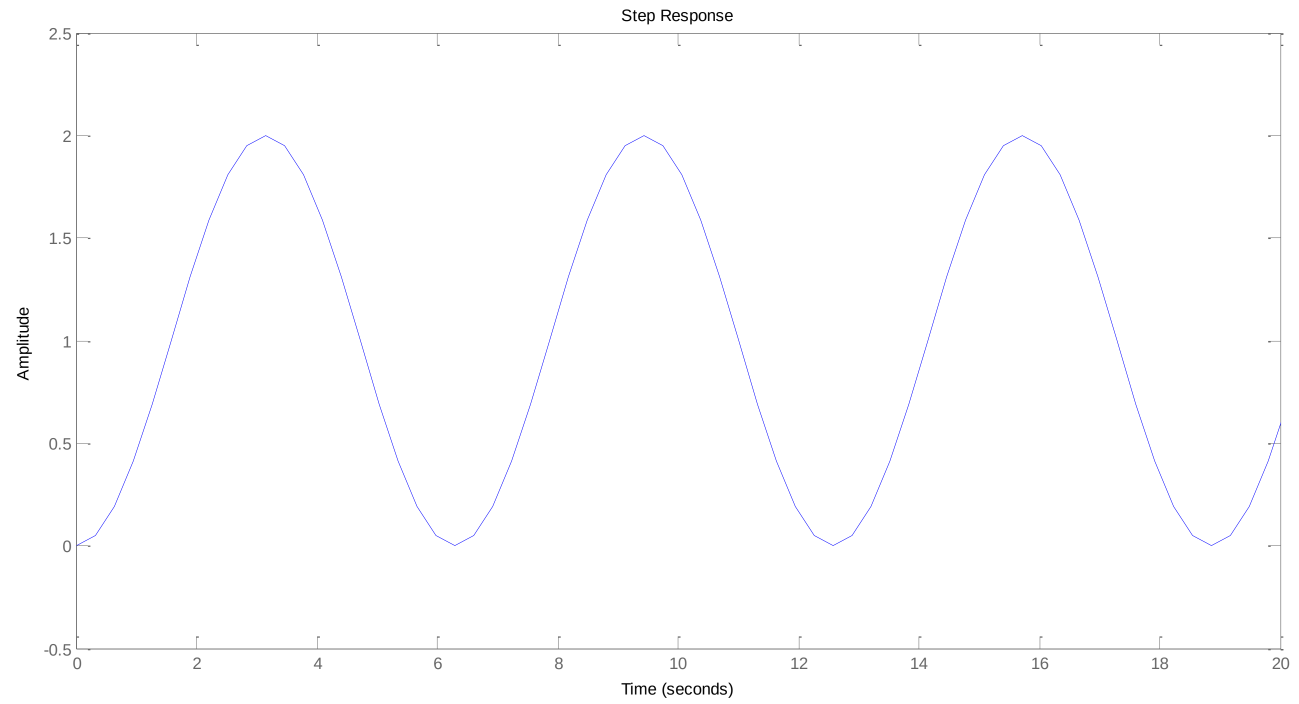


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

Przykład I


Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
x 10⁻⁸
x 10⁷


Step Response
Amplitude
Time (seconds)

Przykład II

1. Wyznaczenie biegunów transmitancji (+mapa biegunów)
2. Wyznaczenie charakterystyki Nyquista
3. Wyznaczenie odpowiedzi skokowej
4. Określenie stabilności

Przykład II

Dla obiektu opisanego transmitancją

$$G(s)=\frac{1.2}{s^2-0.2s-0.35}$$

$f(t)$	$F(s)$
$A1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

zbadać stabilność za pomocą kryterium biegunów, kryterium Nyquista oraz kryterium odpowiedzi skokowej.

Przykład II

$$G(s) = \frac{1.2}{s^2 - 0.2s - 0.35} \Rightarrow \frac{1.2}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

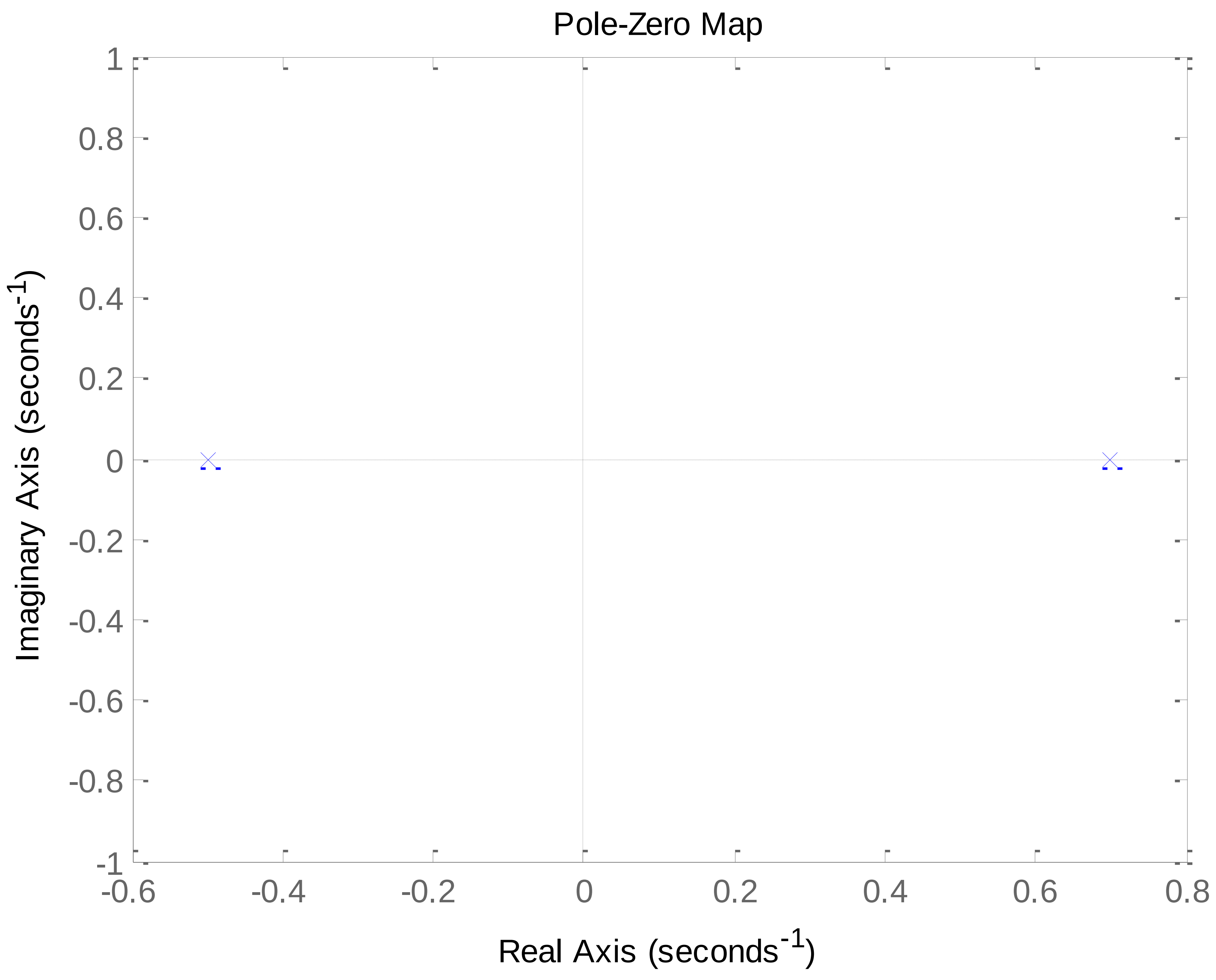
$$\Downarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$s_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad s_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Przykład II

$$G(s) = \frac{1.2}{(s+0.5)(s-0.7)}$$



Przykład II

$$G(j\omega) = \frac{1.2}{-\omega^2 - 0.2j\omega - 0.35}$$

Przykład II

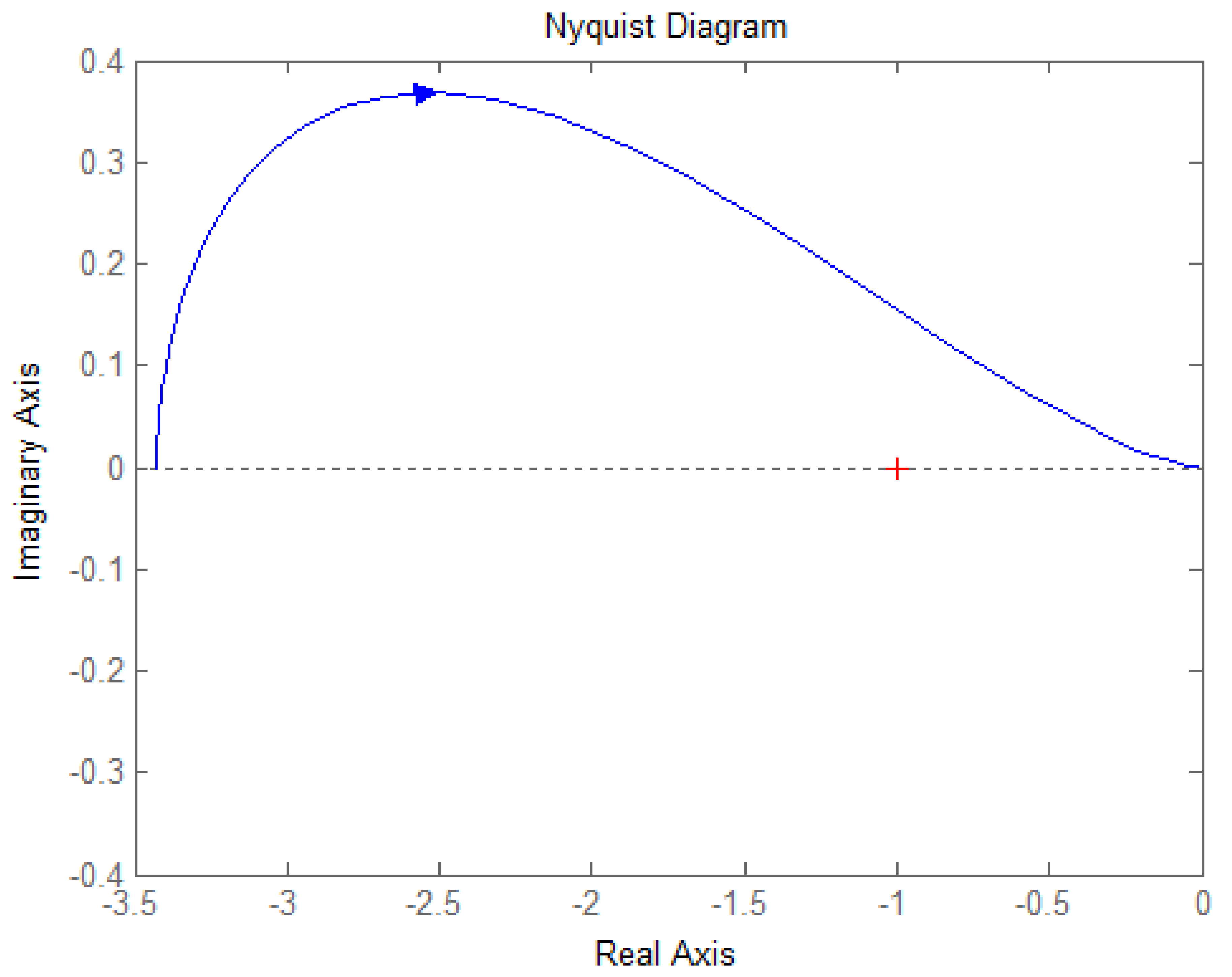
$$G(j\omega) = \frac{1.2}{-\omega^2 - 0.2j\omega - 0.35}$$

$$G(0) = -3.42$$

$$G(1) = -0.8698 + 0.1289j$$

$$G(\infty) = 0$$

Przykład II


Nyquist Diagram
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
Imaginary Axis
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
Real Axis

Przykład II

$$G(s)=\frac{1.2}{(s+0.5)(s-0.7)}$$

$$H(s)=\frac{1.2}{s(s+0.5)(s-0.7)}$$

$f(t)$	$F(s)$
$A1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

POLITECHNIKA OPOLSKA

WEAiI

Przykład II

$$H(s)=\frac{1.2}{s(s+0.5)(s-0.7)}$$

$$H(s)=\frac{-\frac{24}{7}}{s}+\frac{2}{(s+0.5)}+\frac{\frac{10}{7}}{(s-0.7)}$$

$f(t)$	$F(s)$
$A1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Przykład II

$$H(s)=\frac{-\frac{24}{7}}{s}+\frac{2}{(s+0.5)}+\frac{\frac{10}{7}}{(s-0.7)}$$

$$h(t)=-\frac{24}{7}+2e^{-\frac{t}{2}}+\frac{10}{7}e^{\frac{7t}{10}}$$

$f(t)$	$F(s)$
$A1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^n 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,1(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Przykład II

$$h(t) = -\frac{24}{7} + 2e^{-\frac{t}{2}} + \frac{10}{7}e^{\frac{7t}{10}}$$