Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a

Jednostronną transformatą funkcji f(t) nazywamy następującą funkcję

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Gdzie s – operator Laplace'a, określany też częstotliwością zespoloną

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a jest obrazem funkcji *f(t)* w dziedzinie zespolonego parametru *s*. Transformacja Fouriera przekształcała funkcję f(t) w dziedzinę częstotliwości.

Wiedząc, że s jest sumą częstotliwości rzeczywistej i urojonej można zauważyć, że transformacja Fouriera jest szczególnym przypadkiem transformacji Laplace'a!

Podstawowe własności

- Liniowość $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = \mathcal{L}(af(t)) + \mathcal{L}(bg(t))$
- Transformata pochodnej $\mathcal{L}(\frac{df}{dt}) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)^{+}$
- Transformata całki $\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(s))$

Wszystkie własności

	Oryginał $h(t)$	Obraz $\mathcal{L}[h(t)](s)$	Uwagi
liniowość	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha\mathcal{L}[f(t)](s) + \beta\mathcal{L}[g(t)](s)$	
przesunięcie w dziedzinie oryginału	$\chi(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$	$a > 0$
przesunięcie w dziedzinie obrazu	$f(t)e^{-at}$	$\mathcal{L}[f(t)](s+a)$	$a \in \mathbb{R}$
skalowanie	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$
pochodna obrazu	$(-1)^m t^m f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]^{(m)}(s)$	$m \in \mathbb{N}$
pochodna oryginału	$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k} f^{(k-1)}(0+)$	$m \in \mathbb{N}$
całka obrazu	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](x)dx$	
transformata całki oryginału	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}$	
splot	$(f * g)(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$	

Transformaty przykładowych sygnałów

- $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$
- $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$
- $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}$
- $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}(sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}(cos\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^ny(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$

Przykładowe rozwiązanie

$$f(t) = e^{-t}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-st} = \int_0^\infty e^{-t(1+s)} = \left. \frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)} \right|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$t = \infty : \frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)} = \frac{0}{-(1+s)} = 0$$

$$t = 0 : \frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)} = \frac{1}{-(1+s)} = \frac{1}{-(1+s)}$$

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}=\int_0^{\infty} e^{-t(1+s)}=\left.\frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)}\right|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$t=\infty:\ \frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)}=\frac{0}{-(1+s)}=0$$

$$t=0:\ \frac{e^{-t(1+s)}}{-(1+s)}=\frac{1}{-(1+s)}=\frac{1}{-(1+s)}$$

$$F(s)=0-\frac{1}{-(1+s)}$$

$$F(s)=0-\frac{1}{-(1+s)}=\frac{1}{s+1}$$

Zadanie do wykonania na zajęciach

$$1.\ f(t)=e^{t+7}$$

$$2.\ f(t)=e^{-2t-5}$$

$$3.\ f(t)=te^{4t}$$

Zadanie do wykonania po zajęciach

$$1.\ f(t)=\left(e^{t}-e^{-t}\right)^{2}$$

$$2.\ f(t)=4t-10$$

$$3.\ f(t)=2t^{4}$$

Skany/zdjęcia rozwiązań należy przesyłać drogą mailową, ostateczny termin wykonania – przed następnymi zajęciami.